Lección 1

Números

El objetivo de este lección es, a partir del conjunto de los números naturales, introducir los distintos conjuntos numéricos mediante el estudio del problema de la resolución de las ecuaciones: la imposibilidad de encontrar una solución para cierto tipo de ecuaciones obliga a la introducción de un nuevo conjunto de números en el que dicha ecuación ya posea soluciones.

De esta forma se introducen, además de los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números reales junto con sus propiedades más elementales. El estudio de los números complejos es objeto específico de la siguiente lección.

Esta lección finaliza con la introducción de los números binomiales o combinatorios y con su utilización para justificar la fórmula conocida como el Binomio de Newton que permite calcular de forma sencilla la potencia n–ésima de una suma.

1.1 Números naturales: $\mathbb{N}$

El conjunto de los números naturales aparece de forma "natural" en el momento que se necesita contar o enumerar los elementos de un conjunto. Sus elementos son bien conocidos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, 34, \ldots, 1234560087, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

y se encuentran ordenados de menor a mayor (de acuerdo con la idea intuitiva de "tener más elementos"):

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \ldots < 34 < \ldots < 1234560087 < \ldots.$$

En este conjunto se definen dos operaciones (reglas que asignan a cada pareja de elementos en nuestro conjunto de números $\mathbb{N}$ otro elemento de $\mathbb{N}$): la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$.

La primera operación, la suma, resuelve el problema de determinar el número de elementos de un conjunto formado mediante la unión de otros dos: por ejemplo, $2 + 3$ es igual a 5 puesto que si a una colección de dos colores le añado los tres colores de los que dispongo en otra colección obtengo al final una colección con cinco colores.

La segunda operación, el producto, resuelve el problema de determinar el número de parejas que se pueden formar con los elementos de dos conjuntos dados: $2 \cdot 3$ es igual a 6 puesto que si dispongo de tres camisas distintas y de dos pantalones diferentes entonces el número de combinaciones posibles que puedo realizar es igual a seis.

Existen además en $\mathbb{N}$ otras dos "operaciones", resta (representada por $-$) y división (representada por $/$). La resta está asociada a la noción de substracción o eliminación de elementos de un conjunto y la división a la noción de reparto:

- Si a un conjunto de siete elementos le quito cinco entonces el conjunto resultante tiene dos elementos:
$$7 - 5 = 2$$
.
- Si reparto equitativamente seis pasteles entre dos niños entonces cada uno recibe tres:
$$6/2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Estas dos operaciones no siempre están definidas (esto es, en función de los números considerados, se pueden realizar o no):

- En $\mathbb{N}$, $7 - 5$ tiene sentido y es igual 2 pero $5 - 7$ no lo tiene, puesto que de un conjunto con cinco elementos no puedo eliminar siete.
- En $\mathbb{N}$,
$$6/2 = \frac{6}{2}$$
tiene sentido y es igual 3 pero
$$5/3 = \frac{5}{3}$$
no lo tiene puesto que no se pueden repartir cinco elementos en grupos de tres elementos.

Una ecuación en $\mathbb{N}$ (o con números naturales como coeficientes) es una expresión algebraica (sumas y productos en $\mathbb{N}$) igualada a 0 que involucra una incógnita x cuyo valor, en $\mathbb{N}$, se desea determinar para que esa expresión sea cierta. Así

$$2x - 6 = 0$$

es un ejemplo de ecuación cuya solución es $x = 3$: 3 es el único valor que cuando se reemplaza x por tal valor se obtiene $0 = 0$. Así 4 no es solución de la ecuación considerada, ya que $2 \cdot 4 - 6 = 2 \neq 0$.

Las ecuaciones (con coeficientes en $\mathbb{N}$) pueden tener una, dos o más soluciones: la ecuación

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

tiene dos soluciones: $x = 1$ y $x = 2$. Y, como se muestra en la siguiente sección, tambien puede ocurrir que una ecuación con coeficientes en $\mathbb{N}$ no tenga ninguna solución.

1.2 Números enteros: $\mathbb{Z}$

Si α es un número natural cualquiera, la ecuación

$$x + \alpha = 0$$

tiene solución en $\mathbb{N}$ sólo cuando $\alpha = 0$. Los números enteros se forman al añadir a los números naturales (que llamaremos números enteros positivos) aquellos que surgen como las soluciones de estas ecuaciones (que llamaremos números enteros negativos): -1 es la solución de la ecuación $x + 1 = 0$; -2 es la solución de la ecuación $x + 2 = 0$; -3 es la solución de la ecuación $x + 3 = 0$; etc. Así pues, nuestro nuevo conjunto puede describirse como

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$$

y cuyos elementos también se ordenan de menor a mayor, extendiendo el orden que se tiene en $\mathbb{N}$:

$$\ldots\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots\ldots$$

En $\mathbb{Z}$ encontramos las mismas operaciones que en $\mathbb{N}$, con la diferencia que ahora la resta siempre está definida. Así, al sumar dos números enteros nos encontramos con tres posibilidades:

- Si ambos son positivos entonces se utiliza la suma de números naturales: $4 + 3 = 7$.

- Si ambos son negativos entonces se utiliza la suma de números naturales convenientemente modificada:

$$(-4) + (-3) = -(4 + 3) = (-7).$$

- Si uno es positivo y el otro es negativos entonces se utiliza la resta de números naturales modificada en función de los números considerados:

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

ó

$$(-4) + 3 = -(4 - 3) = -1.$$

La resta de dos números enteros se reduce, entonces, a la suma de dos números enteros:

$$a - b = a + (-b).$$

También son tres las posibilidades con las que nos encontramos al multiplicar dos números enteros:

- Si ambos son positivos entonces se utiliza el producto de números naturales:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

- Si uno es positivo y el otro es negativo entonces se utiliza el producto de números enteros como suma reiterada (tantas veces como indique el número entero positivo considerado):

$$(-4) \cdot 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12.$$

- Si ambos son negativos entonces se utiliza el producto de números naturales, convenientemente modificado:

$$(-4) \cdot (-3) = 4 \cdot 3 \cdot (-1)^2 = 12 \cdot 1 = 12.$$

Es especialmente ilustrativo el analizar el porque de la igualdad

$$(-1)^2 = 1.$$

La siguiente cadena muestra cómo justificar tal afirmación:

$$\begin{aligned} 0 &= ((-1) + 1)^2 = \\ &= ((-1) + 1)((-1) + 1) = \\ &= (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1^2 = \\ &= (-1)^2 + (-1). \end{aligned}$$

1.3 Números racionales: $\mathbb{Q}$

A continuación consideramos la ecuación

$$2x - 1 = 0$$

en $\mathbb{Z}$. Es muy sencillo justificar que no existe ningún número entero solución de dicha ecuación: el número entero positivo más pequeño que es el doble de otro número entero es 2 lo que prueba la inexistencia de soluciones para la ecuación considerada.

Los números racionales surgen como el conjunto de soluciones de las ecuaciones del tipo

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números enteros con $a \neq 0$. Así se tiene

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{7}, 12, -15, 1, 0, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Los números racionales representan proporciones ($\frac{1}{4}$ representa la cuarta parte de la unidad o $\frac{7}{3}$ siete veces la tercera parte de la unidad) y tienen también un sentido geométrico: por ejemplo $\frac{2}{3}$ representa la longitud de un segmento definido como la unión de dos de las partes que se obtienen al dividir en tres partes iguales un segmento dado de longitud 1.

Es muy importante tener en cuenta aquí que esta representación de los números racionales adolece de falta de unicidad: las tres fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{-2}{-4}, \frac{3}{6}$$

representan el mismo número racional: todas ellas son solución de la ecuación $2x - 1 = 0$. Para evitar problemas a la hora de distinguir o comparar números racionales usaremos la denominada representación canónica de un número racional, donde el denominador siempre es positivo y numerador y denominador no poseen ningún factor en común. Así $\frac{1}{2}$ es el representante canónico del número racional que representan, por ejemplo, las fracciones $\frac{-2}{-4}$ y $\frac{3}{6}$.

La interpretación geométrica de los números racionales permite justificar la forma en que se define la suma de dos números racionales:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

y la forma con la que se comparan dos números racionales:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} \quad \text{y} \quad \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \quad \text{entonces} \quad \frac{2}{3} > \frac{3}{5}.$$

El producto de números racionales tiene una interpretación más algebraica:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{15} = 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

puesto que la tercera parte de

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

coincide con cuatro veces la quinceava parte de la unidad.

Representación decimal de un número racional.
La representación de un número racional mediante la correspondiente fracción no es la única forma en la que se puede representar un número racional. Así el número racional $\frac{1}{2}$ como longitud de la mitad de un segmento unidad, puede también representarse como el número decimal 0.5.

La conversión de un número racional a su correspondiente representación decimal no requiere más que la división del numerador (convenientemente extendido con los ceros que sean necesarios) entre el denominador. Así la fracción $\frac{1}{6}$ conduce a la siguiente representación decimal:

$$0.16666666666666666666666666666\ldots\ldots \stackrel{\text{def}}{=} 0.1\overline{6}$$

Todo número racional admite una representación decimal exacta (solo interviene una cantidad finita de cifras no nulas) o periódica (requiere una cantidad infinita de cifras no nulas que se repiten con cierta regularidad):

- Exacta: $\dfrac{19}{8} = 2.375$
- Periódica: $\dfrac{1}{13} = 0.076923076923076923\ldots = 0.\overline{076923}$
- Periódica: $\dfrac{23}{17} = 1.\overline{3529411764705882}$
- Periódica: $\dfrac{1215359}{99000} = 12.276\overline{35}$

El proceso para, dada la representación decimal de un número racional, determinar una fracción que lo represente es muy sencillo y los siguientes ejemplos muestran como abordar en la práctica esta cuestión.

Ejemplo 1.3.1
Para transformar en fracción un número decimal exacto es suficiente encontrar la

correspondiente fracción con una potencia de 10 en el denominador y simplificar esta:

$$2.375 = \frac{2375}{1000} = \frac{19}{8}.$$

Si el número decimal es periódico entonces los dos ejemplos que siguen muestran como proceder en cada caso:

$$\begin{array}{rcllll} x & = & 2.\overline{17} & & & \\ 100x & = & 217.\overline{17} & \Longrightarrow & 100x - x = 99x = 215 & \Longrightarrow \quad x = \dfrac{215}{99} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcllll} x & = & 0.1\overline{6} & & & \\ 10x & = & 1.\overline{6} & & & \\ 100x & = & 16.\overline{6} & \Longrightarrow & 100x - 10x = 90x = 15 & \Longrightarrow \quad x = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6} \end{array}$$

■

Como ocurría con las fracciones, tampoco la representación decimal de un número racional es única: el número racional con fracción $\frac{1}{2}$ tiene como representación decimal asociada a 0.5, pero también a $0.4\overline{9}$.

1.4 Números reales: $\mathbb{R}$

Al introducir los números racionales se indicó su interpretación geométrica como longitud de segmentos. Esto permite ordenar los números racionales y colocarlos en una recta como se muestra en la Figura 1.1.

Figura 1.1: Colocación de los números racionales en la recta.

Cabe plantearse en esta situación si son suficientes los números racionales para medir las longitudes de todos los posibles segmentos o, equivalentemente si en la recta anterior hay (o no) huecos.

Como se muestra a continuación, la respuesta a esta pregunta es negativa: consideremos para ello un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 centímetro cada uno.

De acuerdo con el Teorema de Pitágoras[1] la longitud de la hipotenusa, b, ha de verificar:

$$b^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

[1]El Teorema de Pitágoras dice que la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

A esta longitud es a la que se denomina raíz cuadrada de 2 y se le denota por $\sqrt{2}$.

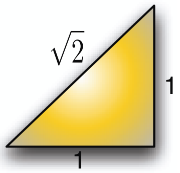

Figura 1.2: El Teorema de Pitágoras y la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{2}$.

Se justifica ahora que no existe ningún número racional que represente la longitud b: esto es, no existe ningún número racional tal que su cuadrado sea igual a 2. La demostración de esta afirmación se hace por reducción al absurdo: se supone que tal número existe y, después de una serie de razonamientos, se llega a un absurdo, por lo que lo supuesto inicialmente ha de ser forzosamente falso.

Si existe un número racional tal que su cuadrado es 2 entonces han de existir dos números naturales α y β, sin factores comunes, tales que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 2$$

y por lo tanto

$$\alpha^2 = 2\beta^2.$$

Como α^2 es par entonces α es par y por ello existe γ tal que

$$\alpha = 2\gamma.$$

Luego

$$(2\gamma)^2 = 2\beta^2$$

y

$$2\gamma^2 = \beta^2,$$

lo que implica que β^2 es par y por ello β también lo es. En este punto hemos alcanzado la contradicción buscada ya que tenemos, por nuestra hipótesis de partida, que α y β son números sin factores comunes y acabamos de concluir que ambos, α y β, son números pares.

En definitiva, lo que acabamos de justificar es que la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

no posee soluciones en $\mathbb{Q}$.

Podríamos plantearnos ahora si todas las longitudes pueden definirse como solución de una ecuación del tipo que genera $\sqrt{2}$: la respuesta también es negativa en este caso. Consideremos el segmento que se obtiene al cortar una circunferencia de diámetro 1 en un punto y estirarla: la longitud de este segmento será $\pi = 3.141592\ldots$ y se puede demostrar que π no es un número del mismo tipo que $\sqrt{2}$, esto es no existe un número natural n ni números racionales a_0, a_1, a_2, ... tales que

$$a_n\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + a_1\pi^1 + a_0 = 0.$$

Expresado con otras palabras, π no es un número algebraico: π no es solución de ninguna ecuación algebraica donde los coeficientes sean números racionales.

Los números reales $\mathbb{R}$ se definen, entonces, como las longitudes de todos los posibles segmentos: esto incluye evidentemente a los números racionales y a π. Colocados en la recta, como se hizo con los números racionales, y con la definición de número real como longitud, tiene sentido el ordenar los números reales, hablar de números reales negativos y definir la suma y resta de números reales en términos de concatenación o substracción de segmentos. El producto de números reales también se puede definir de la misma manera: tal y como muestra la Figura 1.3, usando el Teorema de Thales, dados dos segmentos de longitudes $a > 0$ y $b > 0$, se puede construir un segmento de longitud ab.

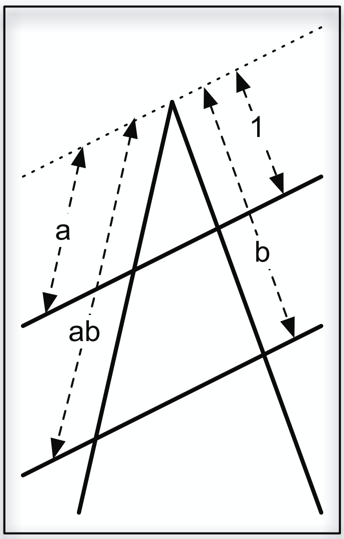

Figura 1.3: El Teorema de Thales y su aplicación a la construcción de un segmento de longitud ab.

Más propiedades de los números reales serán consideradas en este volumen en la Lección 5 al estudiar la resolución de desigualdades.

La siguiente cuestión en este punto es preguntarse si al menos todas las ecuaciones del tipo de las que hicieron aparecer $\sqrt{2}$ tienen solución en $\mathbb{R}$ y, como ya es costumbre, la respuesta también es negativa en este caso.

La ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

no posee solución en $\mathbb{R}$ ya que si tal solución α (número real) existe entonces se tendría

$$\alpha^2 = -1 < 0$$

y se llegaría a que tenemos en $\mathbb{R}$ un elemento cuyo cuadrado es negativo (lo cual no puede ser, ya que en $\mathbb{R}$ los cuadrados son siempre números positivos).

Las soluciones de esta ecuación son las que dan lugar a los números complejos a cuyo estudio se dedicará la Lección 2.

1.5 El Binomio de Newton

El estudio de la fórmula que nos va a permitir calcular la potencia n–ésima de una suma, $(a+b)^n$, trae consigo la oportunidad de introducir los números binomiales o combinatorios que se definen a continuación.

Sea n un número natural. Se define el factorial de n, que denotaremos por $n!$, de la siguiente manera:

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Por convenio se define $0! = 1$ (aunque luego su justificará el por qué de esta igualdad).

Sean n y k dos números naturales tales que $n \geq k$. Se define el número binomial o combinatorio "n sobre k" de la siguiente manera:

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \\ &= (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \end{aligned}$$

se tiene también la siguiente igualdad

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \end{aligned}$$

Es inmediato, a la vista de esta definición y del convenio $0! = 1$ que más adelante justificaremos, el concluir que para cualquier número natural n se tiene:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Dos son las propiedades fundamentales de los números combinatorios:

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

La justificación de ambas propiedades, como se muestra a continuación, es una consecuencia inmediata de la definición de número binomial.

La primera es muy sencilla de justificar puesto que

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

La segunda requiere algo más de esfuerzo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k) \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Estas dos propiedades de los números combinatorios son las que permiten introducir el denominado Triángulo de Tartaglia, que proporciona otro método de cálculo de los números combinatorios, donde cada uno de estos números surge de la suma de los dos que tiene inmediamente sobre él en la fila anterior a la que se encuentra:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{0}=1 & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Así, y como ejemplo, se tiene:

$$\binom{5}{3}=\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=6+4=10.$$

Una consecuencia de estas propiedades de los números combinatorios es que siempre son números naturales, a pesar de que en su definición interviene una división.

Los subconjuntos de un conjunto dado con un número predeterminado de elementos.

Los números combinatorios tienen una de sus principales funciones como herramienta para contar subconjuntos de un conjunto dado. Así, el número combinatorio

$$\binom{5}{3}=10$$

nos va a indicar que sólo existen diez subconjuntos distintos con tres elementos en un conjunto con cinco elementos o, equivalentemente, que de una colección de cinco objetos, solo tenemos diez posibilidades distintas de elección de tres de ellos: si los elementos de la colección considerada los denotamos por a, b, c, d y e entonces esas diez posibilidades vienen dadas por:

$$\begin{array}{ccccc}
\{a,e,b\} & \{a,e,c\} & \{a,e,d\} & \{a,b,c\} & \{a,b,d\} \\
\{a,c,d\} & \{e,b,c\} & \{e,b,d\} & \{e,c,d\} & \{b,c,d\}
\end{array}$$

La justificación de esta propiedad es una consecuencia inmediata de las propiedades de los números combinatorios (o del Triángulo de Tartaglia). Vamos a escribir $C(n,k)$ (con $n \geq k$) para denotar el número de subconjuntos distintos de k elementos que pueden formarse con los elementos de un conjunto con n elementos. Así, para el ejemplo anterior, tendríamos $C(5,3) = 10$.

Si nuestro conjunto tiene $n+1$ elementos entonces, fijando un elemento γ en él, los subconjuntos con $k+1$ elementos de este conjunto pueden ser de dos tipos, aquellos en los que está γ y aquellos en los que no está γ:

1. De los primeros tenemos exactamente $C(n,k)$, ya que, al estar γ, el número de subconjuntos depende sólo de elegir k elementos de entre los n elementos que quedan al eliminar γ.

2. De los segundos tenemos exactamente $C(n,k+1)$, ya que, al no estar γ, el número de subconjuntos depende sólo de elegir $k+1$ elementos de entre los n elementos que quedan al eliminar γ.

Esto nos lleva a concluir que

$$C(n+1,k+1) = C(n,k) + C(n,k+1)$$

y que los números $C(n,k)$ también pueden distribuirse formando un "Triángulo de Tartaglia", donde cada elemento es la suma de los dos elementos que tiene inmediamente sobre él en la fila anterior a la que se encuentra. Como los elementos en las dos primeras filas de ambos Triángulos de Tartaglia coinciden

$$C(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$$

$$C(1,0) = 1 = \binom{1}{0} \qquad\qquad C(1,1) = 1 = \binom{1}{1}$$

así como los extremos en cada fila

$$C(n,0) = 1 = \binom{n}{0} \qquad\qquad C(n,n) = 1 = \binom{n}{n},$$

todo esto hace que la igualdad se extienda a todos los elementos en ambos triángulos. Por ejemplo

$$\begin{aligned} C(2,1) &= C(1,0) + C(1,1) = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{2} \\ C(3,2) &= C(2,1) + C(2,2) = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2} \end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$C(n,k) = \binom{n}{k}.$$

Esta interpretación de los números combinatorios es muy útil para justificar por qué hemos convenido que 0! ha de ser igual a 1. De acuerdo con esta interpretación el número combinatorio $\binom{1}{0}$ ha de ser igual a 1 ya que en un conjunto con un único elemento solo hay un subconjunto sin ningún elemento, el conjunto vacío. Así

$$1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = \frac{1}{0!}$$

lo que obliga a $0! = 1$.

El Binomio de Newton proporciona una fórmula de cálculo de la potencia n–ésima de una suma. Analicemos los primeros casos:

- $(a+b)^1 = a+b$.
- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$.
- $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

La comparación de los coeficientes que aparecen en cada caso con las filas del Triángulo de Tartaglia nos permite reescribir las igualdades anteriores de la siguiente manera

- $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$.
- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$.
- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^2$.
- $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$.

y concluir con la fórmula que se conoce como “Binomio de Newton”:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Esta fórmula es muy útil para deducir igualdades en las que intervienen números combinatorios: por ejemplo, si en la igualdad (1.1) hacemos $a = b = 1$

entonces nos encontramos con que para cualquier número natural n se verifica la igualdad

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

1.6 Problemas de números

Problema 1.6.1
¿Se pueden representar de forma más sencilla los siguientes números reales?

1. $1.43216666666666666666\ldots$.
2. $5.23999999999999999999\ldots$.
3. $-3.99999999999999999999\ldots$.

Problema 1.6.2
¿Se pueden representar de forma más sencilla los siguientes números reales?

1. $\sqrt[4]{4}$.
2. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4}$.
3. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2}}$.
4. $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Problema 1.6.3
Justifica, al igual que se ha hecho con $\sqrt{2}$, que $\sqrt{3}$ no es un número racional.

Problema 1.6.4
Ordena de menor a mayor las siguientes colecciones de números reales

1. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 0, $\frac{3}{2}$.
2. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$.
3. $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}$.
4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{4}}{4}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Problema 1.6.5
Usando regla y compas, con los Teoremas de Pitágoras y Thales como herramientas, construye dos segmentos de longitudes $5\sqrt{2}$ y $2\sqrt{5}$ y, mediante su comparación, decide cual de las siguientes desigualdades es cierta: $5\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ ó $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$.

Problema 1.6.6
Determina tres números racionales que se encuentren entre los números reales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ y cuyo denominador sea un número par.

Problema 1.6.7
Sin utilizar la calculadora, decide cual de las siguientes desigualdades es cierta: $\sqrt{2}/2 < 5/\sqrt{5}$ ó $\sqrt{2}/2 > 5/\sqrt{5}$. Determina todos los números enteros comprendidos entre $\sqrt{2}/2$ y $5/\sqrt{5}$.

Problema 1.6.8
Utiliza el Binomio de Newton para calcular las siguientes potencias:

1. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6$.
2. $\left(1-\sqrt{2}\right)^4$.
3. $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}\right)^8$.

Problema 1.6.9
Utiliza el Binomio de Newton para justificar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k. \end{aligned}$$

Problema 1.6.10
Utiliza el Binomio de Newton para justificar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 3^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k. \end{aligned}$$

Problema 1.6.11
Tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ con seis elementos que vamos a denotar por a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6. Se pide:

1. Determinar el número de subconjuntos distintos con 4 elementos que se puede formar con los seis elementos considerados. Enuméralos.

2. Determinar el número de subconjuntos distintos (con cualquier número de elementos) que tiene tiene el conjunto $\mathcal{X}$.
