Capítulo 1

Sucesiones y límites

El estudio del concepto de límite de una sucesión de números reales es el objeto de esa lección. Puede decirse, sin temor a caer en la equivocación, que sobre este concepto y sus generalizaciones, se basan la mayoría de las nociones fundamentales de la rama de las Matemáticas que se denomina Análisis Matemático o Cálculo y que es la herramienta matemática por excelencia de la Física tal y como se conoce hoy en día.

Esta lección se divide en tres partes. En la primera se introduce la definición de sucesión de números reales a base de una colección de ejemplos que serán de uso habitual en toda la lección. En la segunda y, a base de ejemplos, se motiva la definición de límite que se introduce en la tercera parte de esta lección donde también se introduce un conjunto importante de propiedades de las sucesiones convergentes (aquéllas que poseen límite) y se muestra algunas técnicas que, en la práctica, permiten realizar de forma sencilla el cálculo de límites.

1.1. Primeros ejemplos de sucesiones

Un primer ejemplo de sucesión de números reales ha aparecido en la Lección 5 del primer volumen de este *Laboratorio de Matemáticas*

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right), e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots \right\}$$

como motivación de lo que denominabamos allí Axioma del Supremo y como una de las posibles formas de justificar la aparición del número real e. En ese contexto se definia el número e como el supremo del conjunto de los números reales definidos por la "sucesión" $\mathcal{E}$.

Una sucesión de números reales es una colección infinita de números reales ordenada de tal forma que siempre se puede hablar de un primer elemento, de un segundo elemento y así sucesivamente. En el ejemplo anterior se tiene que el primer elemento es

$$e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2,$$

el segundo

$$e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$$

y así sucesivamente. Denotaremos, en este caso, al conjunto $\mathcal{E}$ por la expresión

$$\{e_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ejemplo 1.1.1
Otros ejemplos de distintas sucesiones aparecen a continuación:

- $\mathcal{A} = \{a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, \ldots, a_n = n^2, \ldots\}$
- $\mathcal{B} = \{b_1 = \frac{-1}{1^2}, b_2 = \frac{1}{2^2}, b_3 = \frac{-1}{3^2}, \ldots, b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \ldots\}$
- $\mathcal{C} = \{c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = -1, \ldots, c_n = (-1)^n, \ldots\}$

En todas ellas es posible calcular el término que ocupa el primer lugar, el segundo, el tercero y así sucesivamente. ∎

En los ejemplos anteriores, existe una expresion en la que se reemplaza n por un valor concreto y permite obtener el término de la sucesión que se desea determinar. Esta expresión se denomina término general: asi el término general de la sucesión $\mathcal{E}$ es

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

o el término general de la sucesión $\mathcal{B}$ es

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Sin embargo las sucesiones no siempre vienen acompañadas por un término general del estilo de las anteriores como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.2
Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de números reales

$$\{f_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

definido cada f_n por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y la expresión

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

que permite determinar cada f_n en función de los dos anteriores. Así se tiene:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1 \\ f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Esta sucesión es conocida como *sucesión de Fibonacci*: en la Lección 7 del Tomo I, calculamos su término general mediante la utililización de los autovalores y autovalores de una matriz. El resultado que se obtuvo fue el siguiente:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En otras palabras, lo que se hizo fue justamente determinar el término general de la sucesión de Fibonacci, que inicialmente fue presentada mediante una regla de recurrencia que, para determinar el término que ocupaba el lugar 30, nos obligaba a calcular todos los términos anteriores a éste. ■

La sucesiones del estilo de la que hemos analizado en el ejemplo anterior se denominan sucesiones recurrentes. Si además, la recurrencia es del mismo estilo que la sucesión de Fibonacci entonces se las denomina sucesiones linealmente recurrentes: esto es, una sucesión donde el término n–ésimo d_n depende de forma lineal de los k anteriores:

$$d_n = \alpha_1 d_{n-1} + \alpha_2 d_{n-2} + \ldots + \alpha_k d_{n-k}$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ números reales fijos.

1.2. La noción de límite

La noción de límite de una sucesión $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tiene como principal objetivo estudiar las regularidades de su comportamiento para valores de n muy grandes. Así para la sucesión $\mathcal{A}$ es claro que por grande que sea un número real M siempre se podrá encontrar un término a_k de la sucesión tal que $a_m > M$ para cualquier término posterior a a_k. Cuando esto ocurra se dirá que la sucesión es divergente a $+\infty$ (esto es, sus valores no se acercan a ningún número real para valores de n muy grandes) y escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty \ .$$

Sin embargo es claro que la sucesión $\mathcal{C}$ no muestra ninguna regularidad para valores de n muy grandes ya que ésta oscila entre 1 y -1.

Las sucesiones $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ serán usadas para motivar la definición de sucesión convergente e introducir el concepto de límite de una sucesión.

Como ya se comprobó en la Lección 5 del primer volumen de este *Laboratorio de Matemáticas*, la sucesión $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de estar acotada superiormente (el número 3 es mayor que cualquier término e_n de la sucesión $\mathcal{E}$) y de ser creciente (cada término es menor que el siguiente). La Figura 1.1 muestra claramente ambas propiedades de la sucesión $\mathcal{E}$.

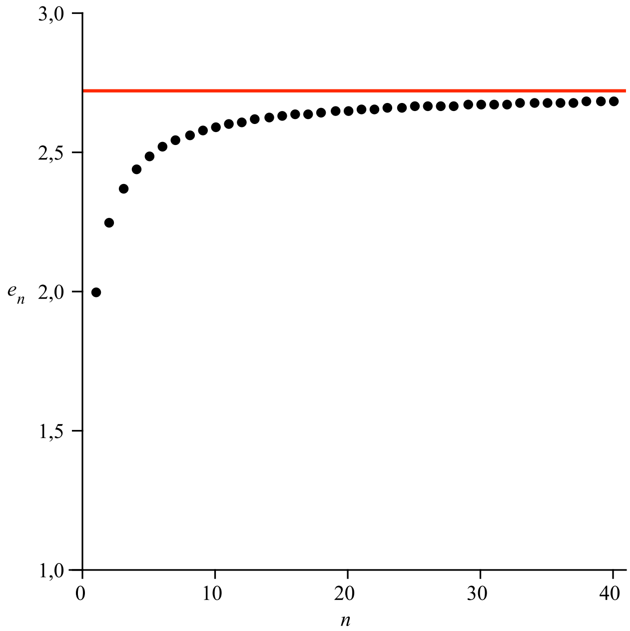

Figura 1.1: *Representación gráfica de los términos de* $\mathcal{E}$: $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

La simple aplicación, en este caso, del Axioma del Supremo que estudiamos en la Lección 5 del Tomo I de este *Laboratorio de Matemáticas* permite asegurar la existencia de un número real, el número e en este caso, que es el supremo de $\mathcal{E}$ y que además se encuentra tan próximo a los elementos de $\mathcal{E}$ como se quiera:

en otras palabras por muy pequeño que sea un número real positivo ϵ siempre se encontrará un elemento de la sucesión e_n tal que $e - e_n$ sea mas pequeño que ϵ. Por ser creciente la sucesión $\mathcal{E}$ se tiene que para cualquier $m \geq n$ se tiene que también $e - e_m$ es más pequeño que ϵ. Cuando ocurra lo mismo que en este ejemplo con una sucesión creciente (resp. decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) diremos que la sucesión considerada es convergente y que su límite es el supremo (resp. el ínfimo) de la sucesión.

Sin embargo las nociones de sucesión convergente y límite también existen para cualquier tipo de sucesiones sean estas crecientes o no. Se dice que un número L es el límite de una sucesión $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ si, por muy pequeño que sea un número real positivo ϵ, siempre se puede encontrar un término a_n de la sucesión tal que a partir de este todos los elementos de la sucesión se encuentren a distancia menor que ϵ de L. Esto equivale a decir que, a partir de a_n, todos los términos de la sucesión en cuestión se encuentran en el intervalo abierto $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Debemos notar aquí que, como ya se indicó en la Lección 5 del Tomo I de este *Laboratorio de Matemáticas*, decir que a_m está en $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ es lo mismo que decir que $|a_m - L|$ sea más pequeño que ϵ. En resumen, tenemos que, por pequeño que sea $\epsilon > 0$ existirá un término a_n de la sucesión considerada tal que para cualquier término a_m posterior a a_n (esto es, si $m \geq n$) se tiene

$$|a_m - L| < \epsilon \ .$$

En este caso se escribirá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

y se dirá que $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión convergente. Así la sucesión $\mathcal{B}$ es claramente convergente y su límite es 0 puesto que el valor de

$$|b_n - 0| = \frac{1}{n^2}$$

se puede hacer tan pequeño como se quiera a partir del n adecuado. Notar que esta sucesión no es ni creciente ni decreciente.

Suele ser muy útil la visualización de esta definición, fundamental en todo lo que sigue, para comprender su significado. Se considera la sucesión

$$\mathcal{A} = \left\{ a_n = \frac{n-1}{n+1} : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

y se dibujan en la misma gráfica (ver figura 1.2) los puntos (n, a_n) y las rectas $y = 1 \pm \epsilon$ para distintos valores de ϵ (en este caso $\epsilon = 1/10$ y $\epsilon = 1/20$). Puesto que esta sucesión es creciente y todos sus términos son menores que 1, es evidente que sólo se debe observar cuando los términos de la sucesión superan las rectas

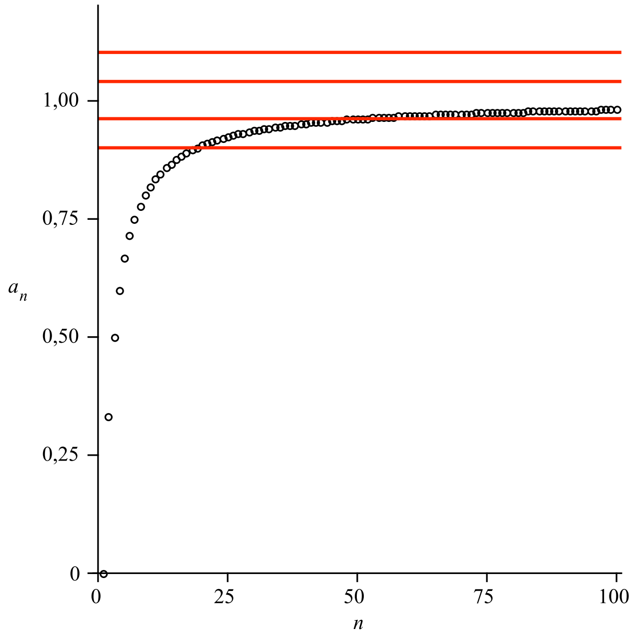

Figura 1.2: *La sucesión* $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ *y las rectas* $y = 1 \pm \epsilon$

$y = 1-\epsilon$ y cómo, a partir de ese momento todos los demás términos se encuentran entre $1-\epsilon$ y 1.

Otro ejemplo de visualización de la definición de límite lo constituye la sucesión (ni creciente, ni decreciente):

$$\mathcal{B} = \left\{ b_n = \frac{n^2-(-1)^n n+1}{2n^2+n+(-1)^n} : n = 1, 2, \dots \right\}.$$

En este caso se observa en la Figura 1.3 como a partir de cierto término, todos los demás términos de la sucesión considerada se encuentran entre $1/2+\epsilon$ y $1/2-\epsilon$ (en la figura $\epsilon = 1/10$ y $\epsilon = 1/25$) lo cual justifica, al ser cierta esta propiedad para cualquier ϵ, que el límite de la sucesión b_n es $1/2$.

En este punto cabe plantearse la cuestión fundamental de averiguar si una sucesión es o no convergente y, en caso afirmativo, calcular el límite. La técnica fundamental siempre recae en el mismo principio: reescribir la definición de la sucesión en cuestión (puede que no se conozca el término general de ésta) de forma que sea evidente su comportamiento (esto es, su regularidad) para valores muy grandes de n. El último ejemplo de esta sección es especialmente ilustrativo en este aspecto.

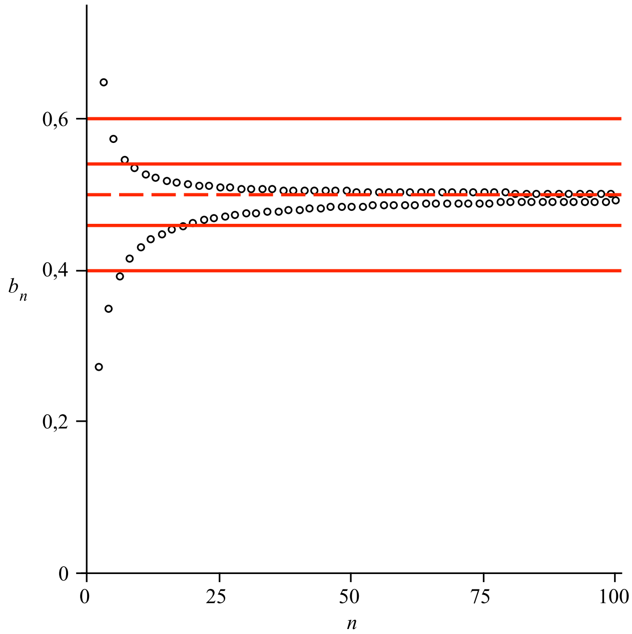

Figura 1.3: *La sucesión* $b_n = \dfrac{n^2 - (-1)^n n + 1}{2n^2 + n + (-1)^n}$ *y las rectas* $y = \dfrac{1}{2} \pm \epsilon$

Ejemplo 1.2.1
Se considera la sucesión:

$$\mathcal{C} = \left\{ c_n = \sqrt{n^2 - n} - n : n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Así como en los ejemplos anteriores era casi inmediato detectar un buen candidato a ser el límite de la sucesión considerada, esta sucesión en principio no parece tener ninguna regularidad que permita un estudio sencillo de su convergencia. En la Tabla 1.1 se muestran algunos de los valores de los términos de la sucesión c_k para valores de k bastante grandes lo que permite conjeturar que un buen candidato a límite de esta sucesión es el número real $-1/2$.

Una buena forma de verificar que el candidato escogido es efectivamente el límite de la sucesión considerada es estudiar la diferencia entre el término general de la sucesión (del que si se dispone en este momento) y ese candidato a límite:

$$\begin{aligned} c_n - \left(-\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{n^2 - n} - n + \frac{1}{2} = \sqrt{n^2 - n} - \left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2 - n} - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{n^2 - n} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{n^2 - n} + \left(n - \frac{1}{2}\right)} = \end{aligned}$$

k	c_k	c_{k+1}
1000	−,50012506253908986427	−,5001249375390351767
10000	−,50001250062503906523	−,5000124993750390598
100000	−,50000125000625003905	−,5000012499937500391
1000000	−,5000001250000625002	−,500000124999937500
10000000	−,500000012500000624	−,50000001249999938

Cuadro 1.1: *Términos de la sucesión* $c_n = \sqrt{n^2-n} - n$

$$\begin{aligned} &= \frac{n^2 - n - \left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2-n}+n-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2-n}+n-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{n^2-n}+4n-2} \, . \end{aligned}$$

La siguiente desigualdad ($n = 1, 2, \ldots$)

$$\left| c_n - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{4\sqrt{n^2-n}+4n-2} < \frac{1}{n} \, ,$$

muy sencilla de verificar, permite concluir de forma inmediata que la sucesión considerada es convergente y que su límite es efectivamente $-1/2$.

Afortunadamente el cálculo de límites no requiere, habitualmente, esta búsqueda de candidatos. En general, y como ya se ha comentado, es suficiente reescribir en forma apropiada el término general de la sucesión para concluir con el valor de su límite. En el ejemplo que se está considerando, esta reescritura se podría efectuar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n^2-n} - n = \frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \\ &= \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}, \end{aligned}$$

observándose de forma inmediata que para valores de n suficientemente grandes, c_n sera un número lo más próximo que se desee a $-1/2$.

1.3. Definición de límite y primeras propiedades.

En la siguiente definición se resume todo lo que se ha descrito en la sección anterior acerca de la noción de límite.

Definición 1.3.1 (Definición de límite)
Sea $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *una sucesión de números reales.*

1. *Se dice que la sucesión $\mathcal{A}$ es convergente si existe un número real L tal que para cada $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un índice m tal que todos los términos de la sucesión a_n, a partir del término m-ésimo, están entre $L-\epsilon$ y $L+\epsilon$:*
$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \quad \textit{si} \quad n \geq m.$$
En otras palabras, si
$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \textit{para} \quad n \geq m.$$
En este caso se escribirá:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

2. *Se dice que la sucesión $\mathcal{A}$ es divergente a $+\infty$ si para cada $M > 0$ (por grande que sea) existe un índice m tal que todos los términos de la sucesión a_n, a partir del término m-ésimo, son mayores que M:*
$$a_n > M, \quad \textit{si} \quad n \geq m.$$
En este caso se escribirá:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

3. *Se dice que la sucesión $\mathcal{A}$ es divergente a $-\infty$ si para cada $M < 0$ (por pequeño que sea) existe un índice m tal que todos los términos de la sucesión a_n, a partir del término m-ésimo, son menores que M:*
$$a_n < M, \quad \textit{si} \quad n \geq m.$$
En este caso se escribirá:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Como quedó de manifiesto en los ejemplos de las sucesiones $\mathcal{E}$ y $\mathcal{A}$ en la sección anterior, es inmediata la justificación de las siguientes propiedades, como una mera reescritura del Axioma del Supremo estudiado en la Lección 5 del Tomo I de este *Laboratorio de Matemáticas*.

Propiedad 1.3.1
Sea $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de números reales creciente y acotada superiormente. Entonces la sucesión a_n es convergente y
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\mathcal{A}).$$

Propiedad 1.3.2
Sea $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *una sucesión de números reales decreciente y acotada inferiormente. Entonces la sucesión* a_n *es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\mathcal{A}).$$

El estudio que se hizo de la sucesión

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right), e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots \right\}$$

en la Lección 5 del primer volumen de este *Laboratorio de Matemáticas* nos llevó a mostrar que

$$\sup(\mathcal{E}) = e$$

(de hecho esta es nuestra definición del número e). Así la siguiente propiedad es una consecuencia inmediata de la Propiedad 1.3.1 y de esta igualdad.

Propiedad 1.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\ .$$

Si bien no toda sucesión acotada es convergente (basta el ejemplo de la sucesión $\mathcal{C}$ mostrada en el Ejemplo 1.1 al comienzo de esta lección) el recíproco es cierto como se muestra a continuación.

Propiedad 1.3.4
Sea $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *una sucesión de números reales convergentes. Entonces* $\mathcal{A}$ *es un conjunto de números reales acotado.*

Justificación.
Si L es el límite de $\mathcal{A}$ entonces se tiene, usando la definición de límite con $\epsilon = 1$ que a partir del término m-ésimo se tiene $(n \geq m)$

$$L - 1 < a_n < L + 1$$

y, por ello, que

$$\min\{L - 1, a_1, a_2, \ldots, a_m\} < a_n < \max\{L + 1, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Se concluye entonces que $\mathcal{A}$ es un conjunto de números reales acotado. ∎

Como se comentó en la sección anterior el cálculo de límites no es más que un estudio detallado de la definición de la sucesión considerada: muchas veces basta reescribir su término general en una forma más apropiada o en función de sucesiones cuyos límites se sepan calcular, o acotar de forma conveniente la sucesión en cuestión por sucesiones de límite conocido, etc. Las propiedades que siguen justifican estos comentarios.

Propiedad 1.3.5
Sean $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *y* $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *dos sucesiones de números reales convergentes verificando que a partir del término m-ésimo se tiene* $a_n \leq b_n$*. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Justificación.
Sea a el límite de a_n y b el límite de b_n. La demostración se hará por reducción al absurdo: se supone que $a > b$ y se llegará a una contradicción con la hipótesis de que cada a_n es menor o igual que b_n cuando $m \geq n$.

Si $a > b$ entonces se define

$$\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0.$$

Usando la definición de límite con este epsilon se tiene que existe un índice p tal que si n es mayor que p entonces

- $a_n > a - \epsilon = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$,
- $b_n < b + \epsilon = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Si n es un índice mayor que p y que n se tiene

$$a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$$

que es justamente la contradicción buscada. ∎

Propiedad 1.3.6
Sean $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *y* $\mathcal{C} = \{c_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *tres sucesiones de números reales verificando que a partir del término m–ésimo se tiene*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \ .$$

Si $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son convergentes y tienen el mismo límite,* L*, entonces* $\mathcal{C}$ *también es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \ .$$

Justificación.
Sea ϵ un número positivo cualquiera. Aplicando la definición de límite a las sucesiones a_n y b_n se tiene que a partir de cierto índice p se verifica

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n < L + \epsilon$$

y, por ello, a partir de ese mismo índice se tiene

$$L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon$$

lo que permite concluir que c_n es convergente y que su límite es L. ∎

Una primera aplicación de esta propiedad aparece en el cálculo de límites. Si se considera la sucesión

$$\mathcal{H} = \left\{ h_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2} : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

se tiene para todo n

$$\frac{1}{n^2} \leq h_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

lo que permite concluir, usando la propiedad anterior, que la sucesión c_n es convergente y que su límite es 0.

La utilización de esta misma propiedad permite asegurar la convergencia de la sucesión

$$\mathcal{D} = \left\{ d_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

y que su límite es 1. En este caso las desigualdades que conducen a tal conclusión son las siguientes:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq d_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \ .$$

Propiedad 1.3.7
Sean $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ dos sucesiones de números reales convergentes. Entonces:

1. *la sucesión $\{a_n + b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \ ,$$
2. *la sucesión $\{-a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y*
$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = - \lim_{n\to\infty} a_n \ ,$$
3. *la sucesión $\{a_n \cdot b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \ ,$$

Justificación.
Se demuestran sólamente (1) y (3). Sea para ello a el límite de la sucesión a_n y b el límite de la sucesión b_n.

Si $\epsilon > 0$ entonces aplicando la definición de límite se tiene que existe un índice m tal que si $n \geq m$ entonces se tienen las desigualdades $|a_n - a| < \epsilon/2$, y $|b_n - b| < \epsilon/2$. Así si $n \geq m$ se tiene

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

lo que permite concluir que la sucesión $\{a_n + b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y que su límite es $a + b$.

La clave de la demostración de (3) se encuentra en la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \\ &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \ . \end{aligned}$$

Como a_n es convergente entonces está acotada y así existe un número real $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo n. Se define a continuación

$$S = \max\{M, |b|\}$$

y se aplica la definición de límite con ϵ/S a a_n y b_n: así se tiene que a partir de un índice m se verifican las desigualdades $|a_n - a| < \epsilon/S$, y $|b_n - b| < \epsilon/S$ y por ello:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\frac{\epsilon}{S} + |b|\frac{\epsilon}{S} \leq \epsilon$$

para cualquier $n \geq m$. Se conluye entonces que la sucesión $\{a_n \cdot b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y que su límite es $a \cdot b$. ∎

El estudio del cociente de sucesiones requiere un estudio más detallado ya que, en primer lugar, se ha de exigir, lógicamente, que el límite de la sucesión en el denominador sea distinto de 0 y, en segundo lugar se ha de justificar que a partir de un índice concreto todos los términos de la sucesión en el denominador han de ser también distintos de 0.

Propiedad 1.3.8
Sean $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ dos sucesiones de números reales convergentes verificando que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Entonces:

1. *existe un índice p tal que a partir de el todos los términos de la sucesión son distintos de 0: si $n \geq p$ entonces $b_n \neq 0$, y*

2. *la sucesión*

$$\left\{\frac{a_n}{b_n} : n = p, p+1, \ldots\right\}$$

es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n} .$$

Justificación.
Se justifica sólamente la primera de las afirmaciones puesto que la segunda usa la misma estrategia de las demostraciones de la propiedad anterior. Supongamos entonces que $L > 0$ (el caso $L < 0$ es totalmente simétrico) y aplíquese la definición de límite a $\epsilon = L/2$. Se tiene entonces que a partir de un cierto índice p se verifica ($n \geq p$)

$$0 < \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < b_n < L + \frac{L}{2}$$

y, por ello, se verifica que $b_n > 0$ para todo $n \geq p$ como se quería demostrar. ∎

Conviene insistir en este punto que lo que se denomina cálculo de límites de sucesiones no es más que un proceso de reescritura del término general de la sucesión considerada en función de sucesiones convergentes y sobre la que se pueda (sobre esta nueva presentación de la sucesión) aplicar alguna de las propiedades que se han visto hasta ahora.

La noción de indeterminación que aparece en muchos libros sólo indica que se está ante un caso sobre el que no se dispone ninguna propiedad que aplicar y por ello no se puede ni asegurar la convergencia de la sucesión, ni, por supuesto, calcular su límite. A título de ejemplo se muestran, a continuación, algunos casos donde esa "reescritura" permite, tras una mera inspección visual, concluir con la convergencia de la sucesión considerada y determinar su límite:

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 .$$

2. $b_n = \dfrac{n^2 - (-1)^n n + 1}{2n^2 + n + (-1)^n} = \dfrac{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n^2}}$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} .$$

3. $c_n = \sqrt{n^2 - n} - n = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1}$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\frac{1}{2} \ .$$

4. $g_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1}$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{3} \ .$$

La siguiente propiedad es muy útil para concluir en muchos casos que una sucesión tiene por límite 0.

Propiedad 1.3.9
Sean $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de números reales acotada (y M es tal que $|a_n| < M$ para cualquier n) y $\{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión convergente y cuyo límite es 0. Entonces la sucesión $\{a_n b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \ .$$

Justificación.
Si ϵ es un número real positivo entonces también lo es ϵ/M y puesto que la sucesión $\{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tiene por límite 0 entonces a partir de cierto índice q sus términos verifican

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$$

(si $n > q$). Como se verifica por hipótesis que $|a_n| < M$ (para cualquier n) entonces se tiene

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

cuando $n > q$. Por ello la sucesión $\{a_n b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es convergente y su límite es 0. ■

La aplicación de la propiedad anterior permite, por ejemplo, justificar de forma inmediata que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0 \ .$$

Basta para ello considerar la sucesión acotada $a_n = \operatorname{sen}(n)$,

$$|\operatorname{sen}(n)| < 1 \ ,$$

la sucesión $b_n = \frac{1}{n}$ cuyo límite es 0 y aplicar la propiedad anterior.

Se finaliza esta lección con la introducción de la noción de subsucesión. Si $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ son dos sucesiones de números reales se dice que $\mathcal{B}$ es una sucesión de $\mathcal{A}$ si cada término de $\mathcal{B}$ es un término de $\mathcal{A}$ y el orden de los elementos de $\mathcal{B}$ se mantiene dentro de $\mathcal{A}$: en otros términos si para todo número natural m existe un número natural n_m tal que

$$b_m = a_{n_m}$$

y además

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < n_{m+1} < \ldots .$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{\frac{1}{2n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$$

es una subsucesión de la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Como era de esperar las subsucesiones de las sucesiones convergentes también son convergentes. La justificación de esta propiedad es un sencillo ejercicio.

Propiedad 1.3.10
Sean $\mathcal{A} = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de números reales convergente y $\mathcal{B} = \{b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una subsucesión de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Una primera aplicación de esta propiedad es el cálculo del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

Basta para ello usar el hecho de que la sucesión

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

es una subsucesión de la sucesión convergente

$$\mathcal{E} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

y, por lo tanto, tienen el mismo límite, el número e (véase la Propiedad 1.3.3). Así la igualdad

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\right]^{2}$$

permite concluir que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\right]^{2} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\right]^{2}$$

y, con ello, que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = +\sqrt{e}$$

puesto que el límite de la sucesión considerada, de existir, ha de ser un número positivo (la opción descartada es $-\sqrt{e}$).

En general también es cierta la siguiente igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{a} \tag{1.1}$$

aunque su justificación requiere de una análisis similar (pero no sencillo) al realizado en la Lección 5 del primer volumen de este *Laboratorio de Matemáticas* para introducir el número e como el supremo de la sucesión $\mathcal{E}$.

1.4. Problemas de sucesiones

Problema 1.4.1
Demuestra que las siguientes sucesiones son convergentes y si L es su límite determina a partir de que término la distancia de L a los términos de la sucesión es menor que $\frac{1}{1000}$.

1. $\{a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. $\{b_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. $\{0{,}3, 0{,}33, 0{,}333, 0{,}3333, 0{,}33333, \ldots\}$.
4. $\{c_n = \dfrac{2^n}{3^n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Problema 1.4.2
Demuestra que la sucesión

$$a_n = \frac{5n+3}{n^2+1}$$

es decreciente y que está acotada inferiormente. ¿Es convergente? ¿Quién es su límite, en caso de ser convergente?

Problema 1.4.3
Responde razonadamente a las siguientes preguntas y, en los casos que se estime oportuno, pon los ejemplos adecuados a la respuesta que se ha dado.

1. Una sucesión es convergente y tiene sus términos alternativamente positivos y negativos. ¿Cual es su límite?
2. ¿Pueden existir dos sucesiones convergentes de números reales que tengan todos sus términos distintos y tengan el mismo límite?
3. ¿Puede existir una sucesión de números reales que sean todos números racionales y que su límite sea un número real no racional?
4. ¿Existen sucesiones de números reales acotadas que no sean convergentes?

5. Sea a_n la sucesión
$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ -3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
¿Es su límite $+\infty$?

6. Sea $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de números reales creciente verificando la condición:
$$a_5 > 5^2, a_6 > 6^2, a_7 > 7^2, a_8 > 8^2, \ldots, a_m > m^2, \ldots$$
¿Es convergente?

Problema 1.4.4
Sea a_n la sucesión definida por
$$a_n = 5a_{n-1} + 3; \quad a_1 = 2.$$
Determina su término general y calcula, si existe, el límite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{5^n}.$$

Problema 1.4.5
Calcula razonadamente los límites de las siguientes sucesiones indicando de forma explícita como has reescrito el término general de la sucesión para que el valor del límite buscado sea determinado mediante una mera inspección visual.

1. $\{a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n + 1} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

2. $\{b_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

3. $\{c_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{3n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Problema 1.4.6
La sucesión de Fibonacci se define de la siguiente manera:

$$f_1 = 0;\ f_2 = 1; \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1},\ n \geq 3\ .$$

Demuestra que $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

Problema 1.4.7
Sea τ un número real positivo. Se define la sucesión a_n de números reales mediante las fórmulas:

$$a_1 = \sqrt{\tau},\ a_2 = \sqrt{\tau + a_1},\ a_3 = \sqrt{\tau + a_2},\ a_4 = \sqrt{\tau + a_3}, \ldots, a_n = \sqrt{\tau + a_{n-1}}.$$

Se pide justificar que

1. la sucesión a_n es creciente, y que
2. la sucesión a_n está acotada superiormente mostrando que $a_n < \sqrt{\tau} + 1$.

Concluye que la sucesión a_n es convergente y calcula su límite.
